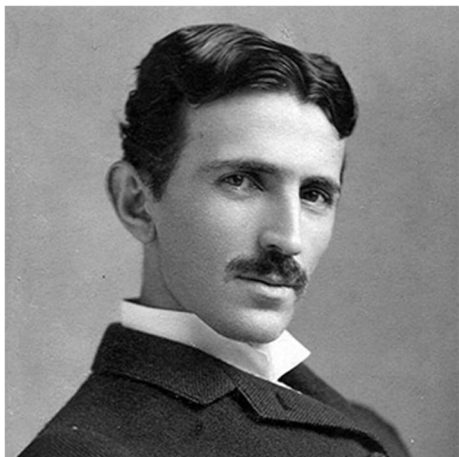


Corrente stazionaria circolare e Potenziale Vettore magnetostatico

(geometria cilindrica esatta)

claudio magno



Nikola Tesla (1856-1943)

Introduzione

Sono qui presentate l'*impostazione* e la *risoluzione* dettagliata di un'integrazione importante in certi problemi classici della Fisica Teorica, anche per ricavarne una fonte per stime numeriche da verificare sperimentalmente. Gli argomenti da connettere simultaneamente, provenienti dall'enorme contenitore dei *Metodi Matematici della Fisica*, non sono né pochi né sempre semplici da armonizzare e maneggiare. Comunque, i riferimenti operativi pertinenti, tutti reperibili da math-notebooks PDF scaricabili da questo web-site, sono indicati.

Il modello *cilindrico* discusso qui è *esatto* e metodologicamente estendibile per analogia a qualsiasi altra 'geometria' (Jackson presenta l'approccio in coordinate *sferiche*, si veda il § 5.5 del suo testo, 3rd ed.). Per quanto mi riguarda, spero di aver dato un piccolo contributo a riempire il 'gap' tra il formalismo vettoriale sintetico e l'esecuzione *concreta*, rigorosa per quel che serve e dettagliata, di un possibile *come-si-fa* (magari, anche in vista di qualche prova scritta ... imminente?).

C M

Preliminare geometrico:

1. Coordinate cartesiane di posizione vs. la simmetria cilindrica

Il punto-campo P in Fig. 1 si proietta in H sull'asse X e in Q sull'asse Z . Quindi, la terna $\{P, H, Q\} \subset X \times Z$ e, con $0 < |x| \equiv \rho$, risultano $P \equiv (\rho; 0; z)$, $H \equiv (\rho; 0; 0)$ e $Q \equiv (0; 0; z)$.

Inoltre, $G \equiv (x; y; 0) \equiv (a \cos \varphi; a \sin \varphi; 0)$ è scelto in modo tale da corrispondere al *centroide* dell'arco generico infinitesimo ds del cammino *circolare* \mathcal{L} di raggio a . Quindi, in rappresentazione (quasi-)esatta, si hanno

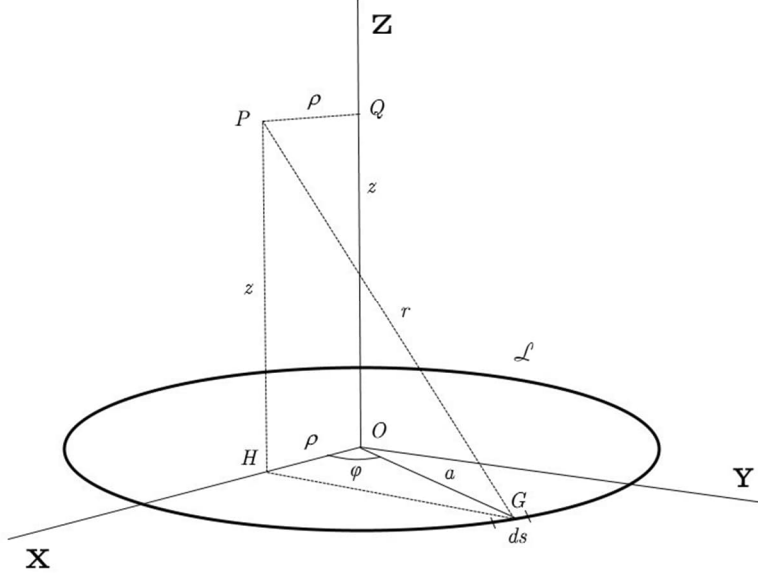


Fig. 1

$$\begin{cases} \overline{OH} = \rho > 0, & \overline{OG} = a, & \widehat{HOG} = \varphi, & \overline{PH} = \overline{OQ} = z, \\ \overline{HG} = (a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \varphi)^{1/2}, & \text{per il Teorema di Carnot,} \\ \overline{PG} \equiv r = (\overline{HG}^2 + \overline{PH}^2)^{1/2} = (a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \varphi)^{1/2}. \end{cases}$$

Poiché, in coordinate cilindriche, l'elemento infinitesimo generico di lunghezza si scrive

$$ds = ((d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2)^{1/2},$$

specializzando ds alla circonferenza \mathcal{L} , risulta, dalla dipendenza *azimutale* $\rho \equiv \rho(\varphi)$ nel piano $X \times Y$,

$$ds = \left(\left(\frac{d\rho}{\rho=a} \right)^2 + (\rho|_{\rho=a \cos \varphi} d\varphi)^2 + \left(\frac{dz}{z=0} \right)^2 \right)^{1/2} = ((a \cos \varphi d\varphi)^2)^{1/2} \equiv a \cos \varphi d\varphi \equiv ds(\varphi).$$

Ciò consente di configurare l'integrale circuitale completo lungo \mathcal{L} ($\in X \times Y$),

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{ds}{r} = a \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \varphi)^{1/2}} \equiv 2a \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \varphi)^{1/2}} d\varphi,$$

la cui funzione integranda è una funzione *pari* di φ . Il calcolo è eseguito in **IE-1**, con identificazioni evidenti delle varie quantità, sia variabili che parametriche. Il risultato è

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{ds}{r} = 4 \left(\frac{a}{\rho} \right)^{1/2} \frac{1}{k} ((1 - k^2/2)F(k) - E(k)), \quad (1)$$

con il *modulo ellittico* dato da

$$k \equiv 2 \left(\frac{a\rho}{(a + \rho)^2 + z^2} \right)^{1/2} \equiv k(\rho, z). \quad (2)$$

□

2, Potenziale Vettore \mathbf{A} e campo di Induzione magnetica \mathbf{B} di una spira circolare piana percorsa da una corrente stazionaria I (coordinate cilindriche)

La rappresentazione cilindrica suggerisce che, per una spira *piana* circolare percorsa da una corrente *stazionaria* I , $\|\mathbf{A}\|$ è *indipendente* da φ . Inoltre, $\mathbf{A} \parallel I ds$ e $ds \approx d\mathbf{r}$ (ds va inteso come *quasi-rettilineo* e *quasi puntiforme*). Quindi, per semplicità, si può scegliere il punto-campo P nel piano $X \times Z$, dove $\varphi = 0$, come dalla Fig. 1 precedente. Ora, se si vuole procedere nel calcolo in coordinate *cilindriche*, emerge la dipendenza completa di \mathbf{A} da φ ! Infatti, come si osserva sul piano $X \times Y$, la somma di due spostamenti (vettori) *infinitesimi* ds lungo \mathcal{L} , simmetrici vs. l'asse

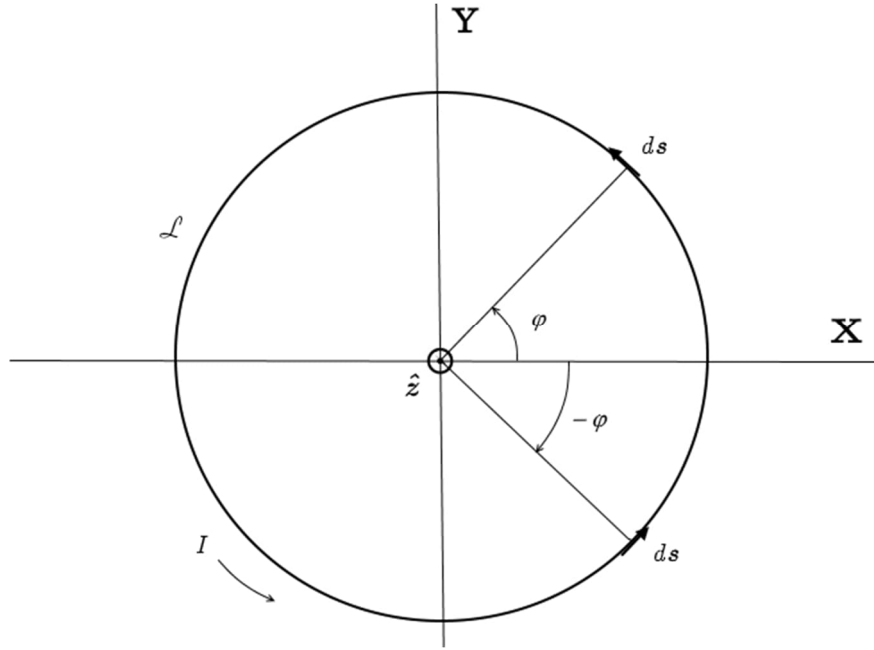


Fig. 2

X , è parallela all'asse $Y \forall \varphi$, i.e., è sempre *normale* al piano $X \times Z$. Dalla definizione circuitale fondamentale (*Ørsted-Biot-Savart-Ampère*), segue che il calcolo di \mathbf{A} , dipendendo *unicamente* dal calcolo dell'integrale di linea $\oint_{\mathcal{L}} \frac{ds}{r} \equiv a \oint_{\mathcal{L}} \frac{\cos \varphi}{r} d\varphi$, ne coinvolgerà la sola φ -componente: $\mathbf{A} \equiv A_{\varphi}(\rho, \varphi, z) \hat{\varphi}$.

Quindi, poiché $A_{\rho}(\rho, \varphi, z) = 0 \wedge A_z(\rho, \varphi, z) = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}
 A_{\varphi}(\rho, \varphi, z) &= \frac{\mu I}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} \frac{ds}{r} = \frac{\mu I a}{4\pi} \left(2a \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \varphi)^{1/2}} d\varphi \right) \\
 &= \frac{\mu I}{\pi} \left(\frac{a}{\rho} \right)^{1/2} \frac{1}{k} ((1 - k^2/2) F(k) - E(k)) \\
 &\approx \frac{\mu I}{32} k^3 \left(1 + \frac{3}{4} k^2 + \frac{75}{128} k^4 + \frac{245}{512} k^6 + \frac{6615}{16384} k^8 - \frac{53361}{131072} k^{10} \right), \quad \text{v. IE-1.1,}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

con il *modulo ellittico* dato dall'Eq. (2).

I risultati (1) e (3) sono *esatti*. Le espansioni in serie di $F(k)$ ed $E(k)$ (v., e.g., **IE-14**) sono riportate per convenienza:

$$F(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((2n)!)^2}{(2^n n!)^4} k^{2n} \right), \tag{4.1}$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((2n)!)^2}{(2n-1)(2^n n!)^4} k^{2n} \right). \tag{4.2}$$

□

Riguardo al calcolo del Campo di Induzione *magnetostatica* \mathbf{B} concatenato con la spira, da $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, segue che

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho A_\varphi & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} 0 - \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_\varphi) \right) \hat{\rho} - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} 0 - \frac{\partial}{\partial z} 0 \right) \rho \hat{\varphi} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} 0 \right) \hat{z} \right) \\ &= -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \hat{\rho} + \left(\frac{1}{\rho} A_\varphi + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} \right) \hat{z} \equiv B_\rho \hat{\rho} + B_z \hat{z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Un controllo delle Eq.i (3) e (2), mostra la struttura analitica *composta* di A_φ nelle *due* variabili, ρ e k ($\equiv k(\rho, z)$),

$$A_\varphi(\rho, \varphi, z) \equiv \alpha(\rho, k(\rho, z)), \quad (6)$$

mentre la dipendenza $\rho \equiv \rho(\varphi)$ resta *implicita* nella simmetria cilindrica. Quindi, si incomincia con

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} &\equiv \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} + \frac{\partial \alpha}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \rho} \\ &\equiv \frac{\mu I}{\pi} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{a^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right) \right) \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2} \right) F(k) - \frac{1}{k} E(k) \right) + \frac{a^{1/2}}{\rho^{1/2}} \frac{\partial}{\partial k} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2} \right) F(k) - \frac{1}{k} E(k) \right) \right) \frac{\partial k}{\partial \rho} \\ &\equiv \frac{\mu I}{\pi} \left(-\frac{a^{1/2}}{2\rho^{3/2}} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2} \right) F(k) - \frac{1}{k} E(k) \right) + \frac{a^{1/2}}{\rho^{1/2}} \frac{\partial}{\partial k} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2} \right) F(k) - \frac{1}{k} E(k) \right) \right) \frac{\partial k}{\partial \rho}, \quad (7) \\ \bullet \quad \frac{\partial}{\partial \rho} k(\rho, z) &\equiv 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{a\rho}{(a+\rho)^2 + z^2} \right)^{1/2} = \frac{(a^2 - \rho^2 + z^2)(a\rho)^{1/2}}{((a+\rho)^2 + z^2)^{3/2}} \\ &\equiv \frac{(((a+\rho)^2 + z^2) - 2a\rho - 2\rho^2)(a\rho)^{1/2}}{((a+\rho)^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{((a+\rho)^2 + z^2)(a\rho)^{1/2}}{((a+\rho)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{2a\rho(a\rho)^{1/2}}{((a+\rho)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{2\rho^2(a\rho)^{1/2}}{((a+\rho)^2 + z^2)^{3/2}} \equiv \frac{k}{2\rho} - \frac{k^3}{4\rho} - \frac{k^3}{4a} \\ &= \frac{k}{2\rho} - \frac{a+\rho}{4a\rho} k^3; \quad (7.1) \end{aligned}$$

Analogamente, si calcola

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} &\equiv \frac{\partial \alpha}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial z} \\ &\equiv \frac{\mu I}{\pi} \left(\frac{a^{1/2}}{\rho^{1/2}} \frac{\partial}{\partial k} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2} \right) F(k) - \frac{1}{k} E(k) \right) \right) \frac{\partial k}{\partial z} \\ &\equiv \frac{\mu I}{\pi} \frac{a^{1/2}}{\rho^{1/2}} \frac{\partial}{\partial k} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2} \right) F(k) - \frac{1}{k} E(k) \right) \frac{\partial k}{\partial z}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial}{\partial z} k(\rho, z) \equiv 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{a\rho}{(a+\rho)^2 + z^2} \right)^{1/2} = -\frac{2z(a\rho)^{1/2}}{\rho((a+\rho)^2 + z^2)^{3/2}} \equiv -\frac{zk^3}{4a\rho}. \quad (8.1)$$

Poi, con le Eq.i (1) e (2) da **IE-15**, si esplicitano le espressioni dei prodotti tra derivate

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial \alpha}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \rho} &= \frac{\mu I}{\pi} \frac{a^{1/2}}{\rho^{1/2}} \frac{\partial}{\partial k} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2} \right) F(k) - \frac{1}{k} E(k) \right) \frac{\partial k}{\partial \rho} \\ &= \frac{\mu I}{\pi} \frac{a^{1/2}}{\rho^{1/2}} \left(-\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \right) F(k) + \left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2} \right) \frac{\partial}{\partial k} F(k) + \frac{1}{k^2} E(k) - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial k} E(k) \right) \frac{\partial k}{\partial \rho} \\ &= \frac{\mu I}{\pi} \frac{a^{1/2}}{\rho^{1/2}} \left(-\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \right) F(k) + \left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2} \right) \left(\frac{1}{k(1-k^2)} E(k) - \frac{1}{k} F(k) \right) \right) + \downarrow \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow + \frac{1}{k^2} E(k) - \frac{1}{k^2} (E(k) - F(k)) \left(\frac{k}{2\rho} - \frac{a+\rho}{4a\rho} k^3 \right), \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial \alpha}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial z} &= \frac{\mu I}{\pi} \frac{a^{1/2}}{\rho^{1/2}} \frac{\partial}{\partial k} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2} \right) F(k) - \frac{1}{k} E(k) \right) \frac{\partial k}{\partial z} = \dots \\ &= \frac{\mu I}{\pi} \frac{a^{1/2}}{\rho^{1/2}} \left(- \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \right) F(k) + \left(\frac{1}{k} - \frac{k}{2} \right) \left(\frac{1}{k(1-k^2)} E(k) - \frac{1}{k} F(k) \right) \right) + \dots \\ &\hookrightarrow + \frac{1}{k^2} E(k) - \frac{1}{k^2} (E(k) - F(k)) \left(- \frac{zk^3}{4a\rho} \right). \end{aligned} \quad (9.2)$$

A questo punto, si eseguono le sostituzioni (9.1) e (9.2) nelle espressioni (7) e (8). L'inserimento successivo di queste nell'Eq. (5) e la semplificazione finale (conviene aiutarsi con un CAS) determinano le forme esplicite generali delle componenti B_ρ e B_z come combinazioni lineari dei parametri $F(k)$ ed $E(k)$, adatte alla tabulazione vs. la quaterna parametrica $\{a, \rho, z, I\}$, e i loro valori-limite sull'asse Z di simmetria, noti dalla teoria elementare:

$$B_\rho = - \frac{\mu I}{2\pi} \frac{z}{\rho((a+\rho)^2+z^2)^{1/2}} \left(F(k) - \frac{a^2+\rho^2+z^2}{(a-\rho)^2+z^2} E(k) \right) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} [0/0] \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0, \quad (10.1)$$

$$B_z = \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{((a+\rho)^2+z^2)^{1/2}} \left(F(k) + \frac{a^2-\rho^2-z^2}{(a-\rho)^2+z^2} E(k) \right) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}. \quad (10.2)$$

□

Un'applicazione interessante è quella della determinazione dell'intensità F della forza che si esercita tra due spire circolari *coassiali*, poste sui piani $z = 0$ e $z = \bar{z}$, di raggi rispettivi a e $\bar{\rho}$, percorse da correnti stazionarie I e \bar{I} . Analogamente al caso elementare di correnti equiverse o controverse in due fili rettilinei paralleli di lunghezza infinita, la forza tra le spire è attrattiva o repulsiva secondo che le correnti circolari si muovono nello stesso senso o in sensi opposti. Il principio meccanico di *azione-reazione* consente di scegliere di rappresentare la forza (di Lorentz) esercitata dal *circuito-sorgente* $\{a, z, ds, I, \mathbf{B}\}$ sul *circuito-campo* $\{\bar{\rho}, \bar{z}, d\bar{s}, \bar{I}\}$. Per simmetria, l'unica componente risultante (non-nulla) del campo di induzione magnetica è B_ρ , la stessa che concatena *tutti* gli elementi infinitesimi (vettoriali) di corrente in entrambi i circuiti, sia $I ds$ che $\bar{I} d\bar{s}$.

Quindi, l'espressione dell'intensità della forza agente sul circuito-campo, dovuta al campo esterno di induzione generato dal circuito-sorgente, si scrive

$$\begin{aligned} F &= \bar{I} \left(\int_0^{2\pi} \underbrace{\bar{\rho} d\bar{\varphi}}_{\equiv d\bar{s}} \right) B_\rho(a, \bar{\rho}, \bar{z}) \equiv \bar{I} (2\pi \bar{\rho}) B_\rho(a, \bar{\rho}, \bar{z}) \\ &= - \frac{\mu I \bar{I} \bar{z}}{((a+\bar{\rho})^2+\bar{z}^2)^{1/2}} \left(F(\bar{k}) - \frac{a^2+\bar{\rho}^2+\bar{z}^2}{(a-\bar{\rho})^2+\bar{z}^2} E(\bar{k}) \right), \end{aligned} \quad (11.1)$$

caratterizzata dal *modulo ellittico*

$$\bar{k} \equiv 2 \left(\frac{a\bar{\rho}}{(a+\bar{\rho})^2+\bar{z}^2} \right)^{1/2}. \quad (11.2)$$

■■■

Bibliografia

Il numero d'ordine *evidenziato* di un testo, e.g., [1], ne indica la versione PDF, talvolta *contenuta* in un archivio-zip scaricabile dalla pagina **Library** di questo web-site: https://www.cm-physmath.net/libr_page.html.

- [1] JACKSON, J. D., *Classical Electrodynamics*, 3RD ED., § 5.5 (anche, cfr/c PROB. 5.10), JOHN WILEY & SONS, INC. (1999; REV. 2006);
- [2] SMYTHE, W. R., *Static and Dynamic Electricity*, 3RD ED., MCGRAWHILL, INC. (1968);
- [3] REITZ, J. R. - MILFORD, F. J. - CHRISTY, R. W., *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4TH ED., § 8-7, ADDISON-WESLEY PUBL. CO. (2008);
- [4] WANGSNES, R. K., *Electromagnetic Fields*, 2ND ED., § 16-2, JOHN WILEY & SONS, INC. (1986);
- [5] LORRAIN, P. - CORSON, D. R. - LORRAIN, F., *Electromagnetic Fields and Waves*, 3RD ED., CH.S 18 & 19, W. H. FREEMAN & CO. (1988);
- [6] JEFIMENKO, O. D., *Electricity and Magnetism*, 2ND ED., ELECTRET SCIENTIFIC CO. (1989);
- [7] LORRAIN, P. - CORSON, D. R., *Electromagnetism - Principles and Applications*, W. H. FREEMAN & CO. (1979);
- [8] GRIFFITHS, D. J., *Introduction to Electrodynamics*, 4TH ED., PRENTICE-HALL, INC. (2012), WITH SOLUTION MANUAL;
- [9] FRANKL, D. R., *Electromagnetic Theory*, PRENTICE-HALL, INC. (1986);
- [10] SHADOWITZ, A., *The Electromagnetic Field*, MCGRAWHILL, INC. (1975);
- [11] ARFKEN, G. B. - WEBER, H. J. - HARRIS, F. E., *Mathematical Methods for Physicists*, 7TH ED., ACADEMIC PRESS. (2013);
- [12] HILDEBRAND, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, 2ND ED., PRENTICE-HALL, INC. (1976).

